Tentamen Talen en Automaten, 27 augustus 2008

Tijdsduur 3 uur. Gesloten boek tentamen.

Voorzie alle in te leveren bladen van je naam, en nummer ze. Schrijf op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Formuleer kort en zakelijk, scherp en zorgvuldig, met steekhoudende argumenten voor je beweringen. Werk netjes. Schrijf duidelijk leesbaar.

Als het tentamen is nagekeken, kun je het inzien bij Wim H. Hesselink, Bernoulliborg kamer 374.

Opgave 1 (9 %). Beschouw een taal L over het alphabet Σ. Vul voor de puntjes (. . .) één van de volgende zes taalsoorten in:
contextvrij, *eindig*, *recursief opsombaar*, *regulier*, *contextgevoelig*, *recursief*.
(a) L is . . . dan en slechts dan als L geaccepteerd wordt door een Turing machine.
(b) L is . . . dan en slechts dan als L geaccepteerd wordt door een deterministische eindige automaat.
(c) L is . . . dan en slechts dan als L geaccepteerd wordt door een stapelautomaat.
(d) L is . . . dan en slechts dan als L geaccepteerd wordt door een NFA-λ.

Opgave 2 (17 %). (a) Er is een standaardalgoritme ter constructie van een NFA-λ bij een gegeven reguliere expressie. Pas dit algoritme toe op de reguliere expressie $((a^* \cup (ab)^*)(c \cup d)^*)^*$.

We noemen de geconstrueerde automaat M_2.
(b) Bepaal in de automaat M_2 de λ-afsluitingen van alle toestanden.
(c) Construeer uit M_2 op systematische wijze een DFA M_2' die dezelfde taal accepteert. Geef de volledige overgangstabel van M_2', de starttoestand en de accepterende toestanden.

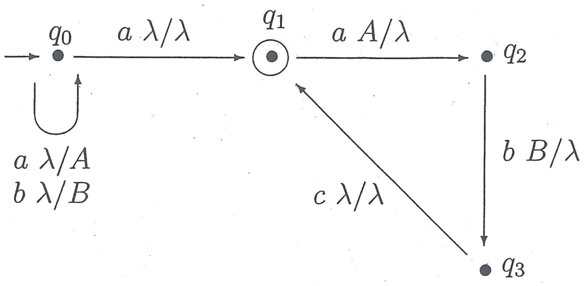
Opgave 3 (13 %). Beschouw een deterministische eindige automaat $M_3 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Voor een toestand $q \in Q$ en een woord $w \in \Sigma^*$ is $\hat{\delta}(q, w)$ de toestand die de automaat bereikt vanuit q na verwerking van het woord w.
(a) Geef een inductieve definitie van $\hat{\delta}(q, w)$.
(b) Bewijs met inductie naar v dat $\hat{\delta}(q, uv) = \hat{\delta}(\hat{\delta}(q, u), v)$.
(c) Geef de definitie van de taal L_3 geaccepteerd door de automaat M_3.
(d) Voor een gegeven $u \in \Sigma^*$ definiëren we $L_u = \{w \in \Sigma^* \mid uw \in L_3\}$. Construeer uit M_3 een DFA M_u die de taal L_u accepteert. Toon de correctheid van je constructie aan.

Opgave 4 (17 %). (a) Formuleer het Pomplemma voor *reguliere* talen.
(b) De taal L_4 over het alfabet $\{a, b\}$ wordt gegeven door de contextvrije grammatica

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & aaT \\ T & \rightarrow & \lambda \mid bTcc\,. \end{array}$$

Beschrijf de taal L_4 als verzameling. Bewijs dat de taal L_4 niet regulier is.

Opgave 5 (11 %). Beschouw de onderstaande stapelautomaat M_5 met de toestanden q_0, q_1, q_2, q_3, de starttoestand q_0 en de enige accepterende toestand q_1. De overgangsfunctie is als beschreven in de graaf, bv. $\delta(q_0, a, \lambda) = \{[q_0, A], [q_1, \lambda]\}$. (Voor gebruikers van het vorige boek: de stapel begint leeg).



L_5 is de taal die door M_5 geaccepteerd wordt door "eindtoestand en lege stapel".
(a) Bepaal de taal L_5 als verzameling. Let op de volgorde van de symbolen. Geef een overtuigende argumentatie.
(b) Beschrijf deze taal met een contextvrije grammatica.

Opgave 6 (10 %). De taal L_6 over alfabet $\{a, b\}$ wordt gegeven door de contextvrije grammatica $S \rightarrow aSb \mid bSa \mid \lambda$. Ontwerp een eenbands Turing machine die voor elke invoerstring beslist of hij tot de taal L_6 behoort.

Opgave 7 (5 %). Geef de definities van *recursieve* talen en van *recursief opsombare* talen.

Opgave 8 (8 %). Gegeven is een recursieve taal L over een alfabet Σ waarvoor $1 \in \Sigma$. De taal L' bestaat uit de strings w waarvoor er een getal $n \in \mathbb{N}$ is met $1^n w \in L$, dus

$$L' = \{w \in \Sigma^* \mid \text{er is een } n \in \mathbb{N} : 1^n w \in L\} .$$

Toon aan dat L' recursief opsombaar is.

Opgave 9 (10 %). Gegeven is een taal L over Σ en twee Turing machines M_1 en M_2. Voor elke $w \in \Sigma^*$ geldt: M_1 stopt op invoer w dan en slechts dan als $w \in L$, en M_2 stopt op invoer w dan en slechts dan als $w \notin L$.
(a) Is de taal L *recursief*?
(b) Is de taal L *recursief opsombaar*?
Motiveer je beide antwoorden.